Міністерство освіти і науки України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXII Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та розв’язання задач

2 тур

21 січня 2017 року

Людина, яка надто стара, щоб навчатися,
скоріше за все, завжди була надто стара, щоб навчатися
Англійське прислів’я

7 клас

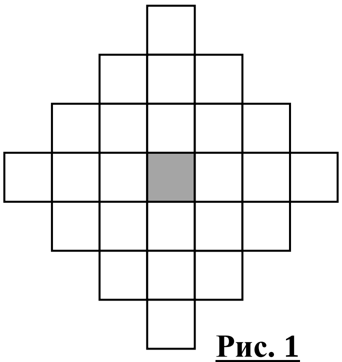


Рис. 1

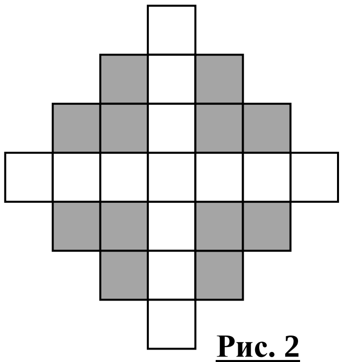


Рис. 2

1. Дошка складається з одиничних квадратиків, як це показане на рис. 1. З самого початку один центральний квадратик чорний, а усі інші – білі. За один крок можна перефарбувати у протилежний колір усі квадратики, що розташовані в одному рядку чи стовпчику, наприклад, можна перефарбувати у протилежний колір верхній квадратик, що утворює горизонтальний ряд, що складається з однієї клітинки. Чи можна отримати за скінченну кількість таких перефарбувань дошку, яка розфарбована як на рис. 2?

Відповідь: можна.
Розв'язання. Перефарбовуємо усі горизонтальні рядки, окрім центрального. А далі перефарбовуємо центральний стовпчик.

2. По колу стоять 2016 людей X_1, X_2, …, X_{2016}, кожний з яких задумав число. Петрик називає число $2 \le k \le 100$. Тоді ведучий повідомляє Петрикові 2016 чисел x_1, x_2, …, x_{2016}, які є середніми арифметичними чисел, що задумали усі сусідні групи з k людей, що стоять поруч, тобто (X_1, X_2, …, X_k), (X_2, X_3, …, X_{k+1}), …, (X_{2016}, X_1, …, X_{k-1}). Яку найменшу кількість разів Петрику треба попросити ведучого сказати такі 2016 чисел для різних k, щоб дізнатися значення числа, що задумав Андрійко, який стоїть на відомому місці?

Відповідь: 1 раз
Розв'язання. Покажемо, що Петрику достатньо попросити сказати один раз. Нехай він попросить ведучого сказати середнє арифметичне кожних п'яти чисел. Позначимо задумані числа через $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ і нам треба знайти число a_{2016}. Позначимо середні арифметичні чисел $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, a_{k+4}$ через b_k, $1 \le k \le 2016$, тут циклічно $a_{2017} = a_1$, $a_{2018} = a_2$, $a_{2019} = a_3$, $a_{2020} = a_4$. Позначимо через $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2016}$.
Якщо додати числа

$$B = b_1 + b_6 + b_{11} + \ldots + b_{2011} = \tfrac{1}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + \tfrac{1}{5}(a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) +$$
$$+ \tfrac{1}{5}(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}) + \ldots + \tfrac{1}{5}(a_{2011} + a_{2012} + a_{2013} + a_{2014} + a_{2015}) = \tfrac{1}{5}(S - a_{2016}).$$

Якщо ж тепер додати числа

$$C = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2016} = \tfrac{1}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + \tfrac{1}{5}(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) +$$
$$+ \tfrac{1}{5}(a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + \tfrac{1}{5}(a_{2016} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \tfrac{1}{5}(5S) = S.$$

Тепер неважко обчислити шукане значення

$$S - a_{2016} = 5B \text{ або } C - 5B = a_{2016}.$$

3. Знайдіть остачу при діленні числа $\underbrace{20172017\ldots2017}_{71\text{ раз }2017}$ на 72.

Відповідь: 17.

Розв'язання. Позначимо це число через A і нагадаємо, що $72=8\cdot 9$. Порахуємо суму цифр числа A: $10\cdot 71=710$. Тому число $A-17=\underbrace{20172017\ldots2017}_{70}2000$ кратне одночасно і 8 (бо закінчується на три нулі), і на 9, бо має суму цифр $710-8=702$. Звідси зрозуміло, що остача при діленні числа A на 72 дорівнює 17.

4. На сторонах AD та BC прямокутника $ABCD$ вибрані точки M, N та P, Q відповідно таким чином, що $AM=MN=ND=BP=PQ=QC$. На відрізку QC вибрана точка X, відмінна від кінців відрізку. Доведіть, що периметр ΔANX більше від периметра ΔMDX.

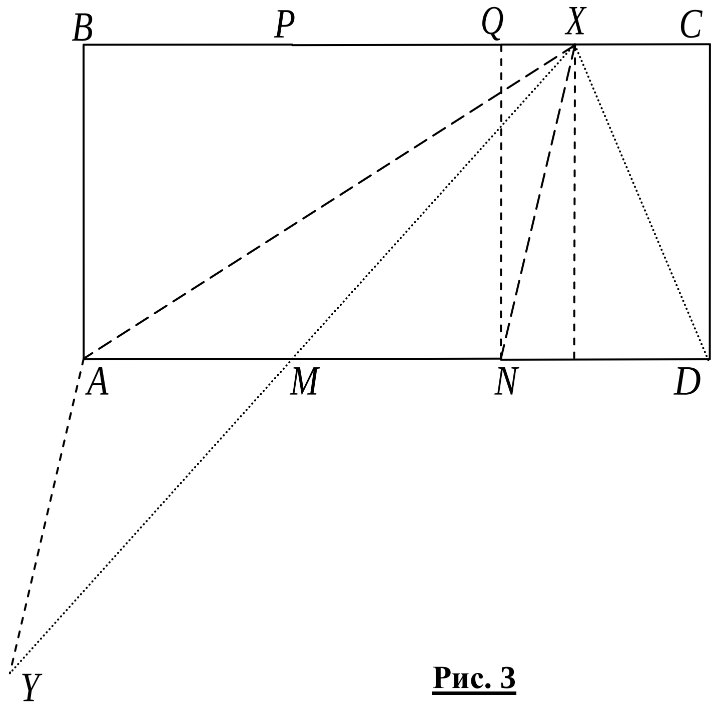


Рис. 3

Розв'язання. На промені XM за точку M відкладемо відрізок $MY=MX$ (рис. 3). Тоді $\Delta AMY=\Delta MXN$ за кутом та двома прилеглими сторонами, тепер маємо, що:

$$P_{ANX}=AX+XN+AN=$$
$$=AX+AY+MD>XY+MD=$$
$$=2XM+MD>XM+XD+MD=$$
$$=P_{MXD},$$

оскільки проекція відрізку XD на пряму AD менша від проекції відрізку XM, то і сам відрізок менший за довжиною.

4.1. Нехай AC – найбільша сторона трикутника ABC. На промені AC вибрана точка M, а на промені CA – точка N так, що $AM=AB$ та $CN=CB$.

а) Доведіть ΔABC рівнобедрений, якщо відомо, що $BM=BN$.

б) Чи залишиться твердження чинним, якщо AC -- не обов'язково найбільша сторона трикутника ABC.

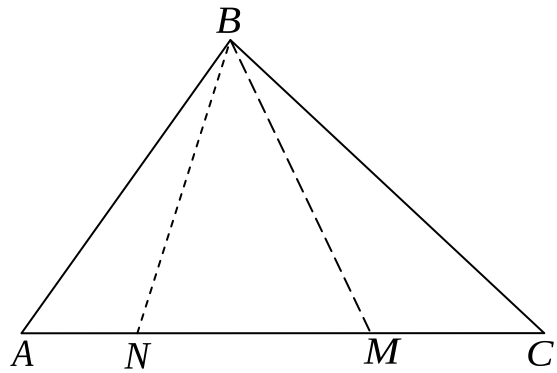


Рис. 4

Відповідь: ***б)*** залишиться чинним.

Розв'язання. ***а)*** Оскільки ΔBMN рівнобедрений (рис. 4), то $\angle BMN=\angle BNM \Rightarrow \angle BMC=\angle BNA$. Крім того, оскільки трикутники ABM та BNC також рівнобедрені, то $\angle ABM=\angle AMB=\angle BNC=\angle NBC$. З останнього:

$$\angle ABN=\angle ABM-\angle NBM=\angle NBC-\angle NBM=\angle MBC.$$

Таким чином $\Delta ANB=\Delta BMC$ за стороною $BM=BN$ та двома кутами, що прилеглі до них. Звідси $AB=BC$ і ΔABC - рівнобедрений.

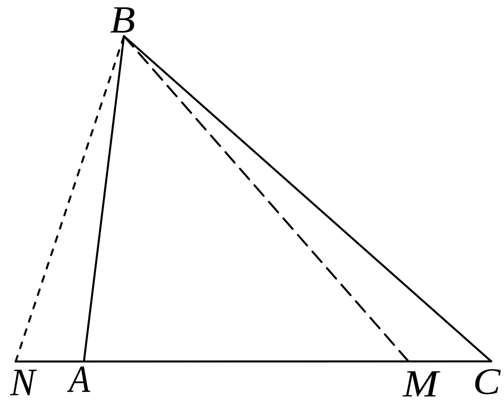


Рис. 5

б) Доведення взагалі не змінюється у випадку, якщо AC найменша сторона. Якщо, наприклад, $AB\le AC\le BC$. То точки N, A, M, C розташовані на прямій саме в такому порядку (рис. 5). Але тоді з аналогічних рівностей кутів в рівнобедрених трикутниках:

$$\angle ABM = \angle AMB = \angle BNC = \angle NBC \text{ -- суперечність.}$$

Тобто ця ситуація не можлива.

8 клас

1. Андрій та Олеся одночасно виїхали та проїхали на машинах шлях, що складається з ділянок S_1, S_2, S_3 з постійними, але (можливо) різними швидкостями на кожній з ділянок. Виявилось, що на ділянці S_1 швидкість Андрія більша за швидкість Олесі на ділянці S_2, на ділянці S_2 швидкість Андрія більша за швидкість Олесі на ділянці S_3, ну й на ділянці S_3 швидкість Андрія більша за швидкість Олесі на ділянці S_1. Чи могло так статися, що Олеся швидше дісталася до кінця шляху?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: так, могло.

Розв'язання. Нехай, наприклад ділянки мали довжини: $S_1 = 1000$, $S_2 = 100$, $S_3 = 10$. Нехай швидкість Андрія на S_1 та Олесі на S_2 дорівнює $v_1 = 10$, швидкість Андрія на S_2 та Олесі на S_3 дорівнює $v_2 = 1$, а швидкість Андрія на S_3 та Олесі на S_1 дорівнює $v_3 = 50$. Порахуємо весь час на шляху Андрія:

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{1000}{10} = 100,\ t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{100}{1} = 100,\ t_3 = \frac{S_3}{v_3} = \frac{10}{50} = 0{,}2.$$

Тому загальний час Андрія: $t_1 + t_2 + t_3 = 200{,}2$.

Аналогічно для Олесі маємо такі значення:

$$T_1 = \frac{S_1}{v_3} = \frac{1000}{50} = 20,\ T_2 = \frac{S_2}{v_1} = \frac{100}{10} = 10,\ T_3 = \frac{S_3}{v_2} = \frac{10}{1} = 10.$$

Загальний час Олесі: $T_1 + T_2 + T_3 = 40$.

Як бачимо час Олесі набагато менший ніж у Андрія, тому залишається точно задовольнити умови задачі, для цього достатньо щоб на першій ділянці у Андрія була середня швидкість $v_{1A} = 10$, а у Олесі на другій ділянці середня швидкість Олесі $v_{1O} = 9{,}9$, аналогічно $v_{2A} = 1$, $v_{2O} = 0{,}9$ та $v_{3A} = 50$, $v_{3O} = 49{,}9$. Простою перевіркою не важко переконатись, що час Олесі на весь шлях менший, ніж у Андрія.

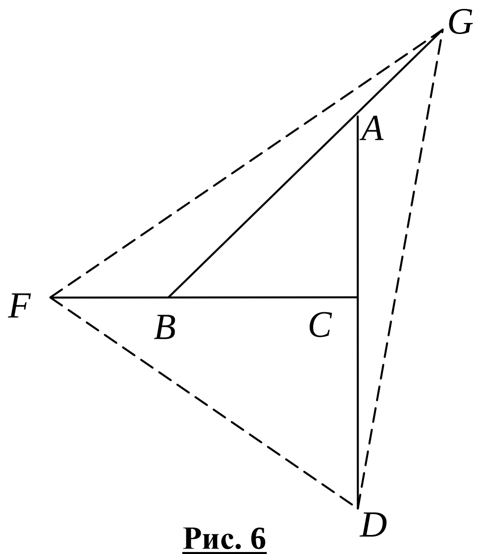


Рис. 6

2. Трикутник ABC прямокутний та рівнобедрений з прямим кутом при вершині C. На промені CB за вершиною B вибрана точка F, на промені BA за вершиною A вибрана точка G так, що $AG = BF$. Промінь GD проведено так, що він перетинається з променем AC у точці D при цьому $\angle FGD = 45°$. Знайдіть $\angle FDG$.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $67{,}5°$.

Розв'язання. Запишемо значення кутів, які ми можемо визначити, виходячи з умов задачі (рис. 6):

$$\angle CBA = \angle BAC = \angle FGD = 45° \Rightarrow \angle DAG = \angle GBF = 135°.$$

$$\angle ADG = \angle CAB - \angle DGA = 45° - \angle DGA = \angle DGF - \angle DGA = \angle BGF.$$

Таким чином $\Delta GBF = \Delta DAG$ за рівними сторонами $GA = BF$ та прилеглими до неї кутами. Тому ΔGDF -- рівнобедрений з кутом при вершині $45°$, тому $\angle FDG = \frac{1}{2}(180° - 45°) = 67{,}5°$.

3. Дошка складається з одиничних квадратиків, як це показане на рис. 7. З самого початку один центральний квадратик чорний, а усі інші – білі. За один крок можна перефарбувати у протилежний колір усі квадратики, що розташовані в одному рядку чи стовпчику, наприклад, можна перефарбувати у протилежний колір верхній квадратик, що утворює горизонтальний ряд, що складається з однієї клітинки. Чи можна отримати за скінченну кількість таких перефарбувань дошку, яка розфарбована як на рис. 8?

(Богдан Рубльов)

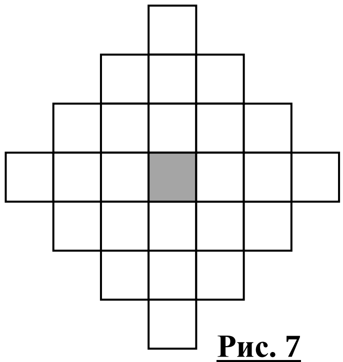


Рис. 7

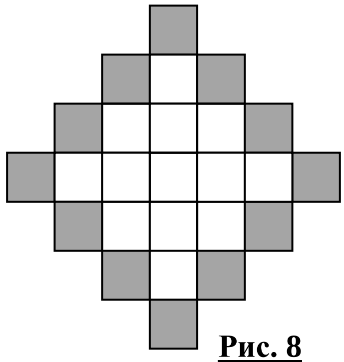


Рис. 8

Відповідь: не можливо.
Розв'язання. Розглянемо парність кількості чорних клітин в квадратику 2×2, що виділений на рис. 9. Це є інваріант, тобто вона не змінюється при заданих перефарбуваннях. У початковому розфарбуванні це значення дорівнює 1, тобто непарне, а у кінцевому – 0, тобто парне, що й доводить неможливість такого перефарбування.

Альтернативне розв'язання. Покажемо, що шукане перефарбування не можливе. Очевидно, що порядок фарбувань стовпчиків та рядків не відіграє ролі, а важлива лише кількість таких перефарбувань. Крім того, перефарбовувати той самий рядок чи стовпчик більше одного разу немає сенсу. Два перефарбування рівносильні жодному перефарбуванню. Таким чином кожний рядок можна було перефарбувати або один раз, або жодного. Припустимо, що шукане перефарбування можливе. Для зручності позначимо стовпчики дошки зліва направо буквами $a, b, \ldots, g$, а рядки знизу догори цифрами $1, 2, \ldots, 7$ (рис. 10).

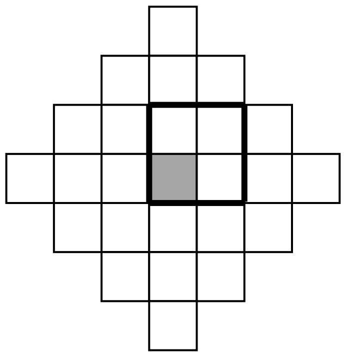


Рис. 9

Припустимо, що для зафарбування поля $b3$ у чорний колір був використаний 3-й рядок. Тоді ще раз його не можна фарбувати, крім того, тоді не можна фарбувати стовпчик b, оскільки тоді поле $b3$ стане білим. Для остаточного перефарбування його в чорний колір доведеться вдруге перефарбувати або 3-й рядок, або стовпчик b. Тоді ми маємо задля поля $b5$ перефарбувати 5-й рядок. Щоб поля $c3-e3$ та $c5-e5$ стали білими, треба перефарбувати стовпчик $c-e$. Із-за полів $c4, e4$, щоб вони стали білими, ми маємо перефарбувати 4-й рядок. Але тоді чорним стане поле $b4$, яке вже без порушень білим зробити неможливо.

Аналогічно, якщо першим фарбуємо рядки b, f. Тепер із-а полів $b4, f4$ треба перефарбувати 4-й рядок. Тепер для полів $c4, e4$ треба пофарбувати стовпчики c, e. Але тепер поля $c3, c5$ вже не можна зробити білими.
Одержана суперечність завершує доведення.

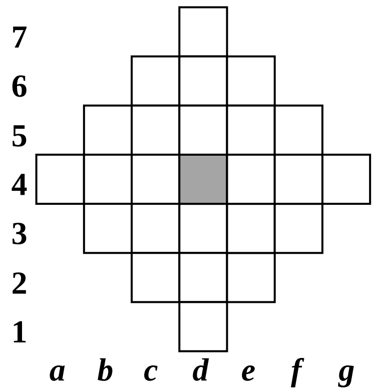


Рис. 10

4. Нехай $S(n)$ позначає суму цифр натурального числа n. Доведіть, що якщо для натуральних чисел a, b справджуються твердження $S(ab) = S(a)S(b)$ та

$S(a+b)\neq S(a)+S(b)$, то принаймні одне з трьох чисел a, b чи $a+b$ закінчується нулем.

(Данила Мисак)

Розв'язання. Нехай $a=\overline{a_n\ldots a_1 a_0}$, $b=\overline{b_n\ldots b_1 b_0}$.

Почнемо з доведення простого твердження: сума цифр числа, що має хоча б дві цифри, менша за саме це число. Справді, це випливає з нерівності:

$$a-S(a)=(10^n-1)a_n+\ldots+(10-1)a_1+(1-1)a_0\geq(10^n-1)a_n>0 \text{ при } n\geq 1.$$

Тепер доведемо, що для довільних натуральних a, b справджується нерівність $S(a+b)\leq S(a)+S(b)$, причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли $a_i+b_i\leq 9$ $i=\overline{1, \min\{m, n\}}$. Без втрати загальності вважатимемо, що $n\geq m$. Розглянемо число $a+b_0$. Якщо $a_0+b_0\leq 9$, то $S(a+b_0)=S(a)+b_0$; якщо $a_0+b_0>9$, у суми $a+b_0$ у розряді одиниць стоятиме цифра a_0+b_0-10, а перенесена в старший розряд одиниця додасть до суми попередніх цифр числа a один і, якщо в розряді десятків стояла дев'ятка, змінить цю дев'ятку (і, за наявності, ще кілька наступних дев'яток) на нулі. Тоді

$$S(a+b_0)=S(a)+b_0-10+1-9k<S(a)+b_0-9(k+1)<S(a)+b_0,$$

де k – кількість послідовних дев'яток, починаючи з розряду десятків. Розглянемо тепер суму $(a+b_0)+10b_1$. Використовуючи аналогічні міркування, робимо висновок, що

$$S(a+b_0+10b_1)\leq S(a+b_0)+b_1\leq S(a)+b_0+b_1,$$

причому рівність порушується тоді й лише тоді, коли порушується хоча б одна з двох рівностей: $a_0+b_0\leq 9$ та $a_1+b_1\leq 9$. Застосувавши ті самі міркування послідовно до b_2, b_3, …, b_m, отримаємо, що

$$S(a+b)\leq S(a+b_0+10b_1+\ldots+10^m b_m)\leq S(a)+b_0+b_1+\ldots+b_m=S(a)+S(b),$$

причому рівність порушується тоді й лише тоді, коли сума хоча б однієї пари однакових розрядів перевищує 9.

Твердження було доведене для суми двох чисел, але з допомогою методу математичної індукції його дуже просто можна поширити на довільну кількість доданків:

$$S(a+b+\ldots+z)\leq S(a)+S(b)+\ldots+S(z),$$

причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли для кожного $i\geq 0$ сума i-х розрядів чисел не перевищує 9: $a_i+b_i+\ldots+z_i\leq 9$ (i-й розряд числа вважаємо нульовим, якщо i більше за кількість цифр у числі або рівне їй). Тож можемо записати такий ланцюжок нерівностей:

$$S(ab)=S\left(\sum_{i=0}^{n}10^i a_i\cdot\sum_{j=0}^{m}10^j b_j\right)=S\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}10^{i+j}a_i a_j\right)\leq\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}S(10^{i+j}a_i a_j)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}S(a_i b_j)\leq\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_i b_j=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot\sum_{j=0}^{m}b_j=S(a)S(b).$$

причому рівність досягається лише у випадку, якщо вона зберігається на всіх проміжних етапах. Тож якщо $S(ab)=S(a)S(b)$, то для кожної пари розрядів i, j добуток $a_i b_j$ – одноцифровий. Але з умови $S(a+b)\neq S(a)+S(b)$ випливає, що існує такий індекс i, для якого $a_i+b_i>9$, тоді одна з цифр a_i, b_i дорівнює 9, а інша – 1. Нехай, наприклад, $a_i=9, b_i=1$. Якщо $i=0$, то число $a+b$ закінчується нулем. Якщо ж $i\geq 1$, розглянемо цифру b_0. Оскільки $a_i b_0\leq 9$, то $b_0=0$ або $b_0=1$. Але якщо $b_0=1$ і $a_0>0$, то

$$a_i b_0+b_i a_0=9+a_0>9 \text{ та } S(10^i a_i b_0+10^i b_i a_0)<S(10^i a_i b_0)+S(10^i b_i a_0),$$

а тому рівність $S(ab) = S(a)S(b)$ порушується. Тож принаймні одне з чисел a, b чи $a+b$ має закінчуватися нулем.

4.1. Для яких цифр a для кожного натурального n усі числа сукупності

$$\overline{100a},\ \overline{1001a},\ \overline{10011a},\ \overline{100111a},\ \ldots,\ \overline{100\underbrace{11\ldots1}_{n}a}$$

мають спільний дільник.

<u>Відповідь</u>: $a \in \{0;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$.

<u>Розв'язання</u>. Очевидно, що випадки $a \in \{0;\ 2;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8\}$ умову задовольняють. Розглянемо різницю сусідніх чисел:

$$100\underbrace{11\ldots1}_{n}a - 100\underbrace{11\ldots1}_{n-1}a = 901\underbrace{00\ldots0}_{n} = 2^n \cdot 5^n \cdot 17 \cdot 53.$$

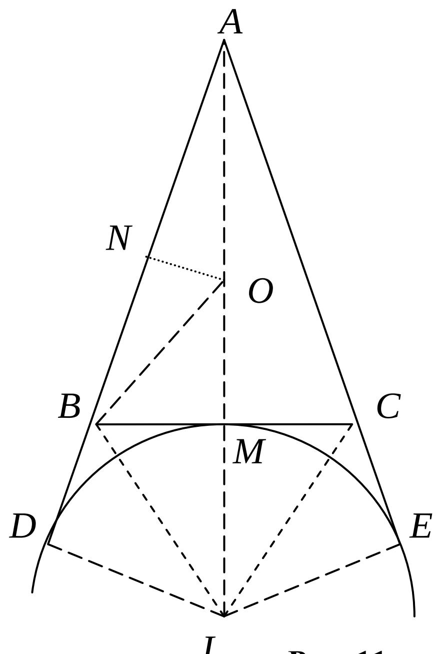
Таким чином усі спільні дільники досліджуваної сукупності чисел знаходяться серед множників правої частини. Якщо принаймні одне число ділиться на якійсь з цих дільників, то на нього ділиться і кожне число. Аналогічно, якщо принаймні одне число не ділиться на жоден з цих дільників, то ці числа спільного дільника не мають.
При $a=1$ число 1001 не ділиться на жодне з цих чисел, а тому $a=1$ умову не задовольняє.
При $a=3$ число 1003 ділиться на 17, $a=3$ умову задовольняє.
При $a=7$ число 1007 ділиться на 13, $a=7$ умову задовольняє.
При $a=9$ число 1009 не ділиться на жодне з цих чисел, а тому $a=9$ умову не задовольняє.

<u>9 клас</u>

1. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо відомо, що його центр описаного кола O та центр зовнівписаного кола I_A (тобто кола, що дотикається сторони BC та продовження інших двох сторін ΔABC) симетричні відносно прямої BC.

(Богдан Рубльов)

<u>Відповідь</u>: $36°, 72°, 72°$.



<u>Рис. 11</u>

<u>Розв'язання</u>. Спочатку покажемо, що ΔABC – рівнобедрений. Дійсно, позначимо через M середину сторони BC (рис. 11). Тоді точки I_A, M та O лежать на одній прямій, та $\Delta BMI_A = \Delta CMI_A$, оскільки вони прямокутні та мають рівні катети. Тому $\angle I_ABC = \angle I_ACB$, оскільки центр I_A лежить на бісектрисах кутів DBC та ECB, тому $\angle DBC = \angle ECB \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$, що й треба було показати.
Позначимо середину сторони AB через N, а кути $\angle BAM = \angle CAM = \alpha$, $\angle MBO = \beta$. Тоді з рівності $\Delta ANO = \Delta BNO$ маємо $\angle OBA = \alpha$. Далі можемо записати такі умови.
З ΔABM $2\alpha + \beta = 90°$, з розгорнутого $\angle DBA$ маємо $\alpha + 3\beta = 180°$. Далі знаходимо:
$3\beta = 180° - \alpha = 270° - 6\alpha \Rightarrow 5\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 18°$.

Таким чином кут при вершині $2\alpha = 36°$, при основі: $\frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$.

2. Задача 7-3.

3. Для дійсних чисел $x_1 > x_2 > \ldots > x_n \geq 0$, $n \geq 2$, що задовольняють умову $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$, доведіть нерівність:

$$2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n) \geq n \cdot (x_2 + x_3 + \ldots + x_n).$$

(Віталій Сенін)

***Розв'язання*.** Доведення випливає з таких перетворень:

$$2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n) =$$
$$2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n) + n^2 - n^2 =$$
$$2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n) +$$
$$+ n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) =$$
$$= nx_1 + n(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) =$$
$$= n(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x_1 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) =$$
$$= n(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + (x_1x_1 - x_1^2) + (x_1x_2 - x_2^2) + \ldots + (x_1x_n - x_n^2) =$$
$$= n(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + x_2(x_1 - x_2) + x_3(x_1 - x_3) + \ldots + x_n(x_1 - x_n) \geq n(x_2 + x_3 + \ldots + x_n),$$

що й треба було довести.

4. Автомат «BLACKMAX» приймає на вхід дві картки з числами n та $n+1$, де n - довільне натуральне, і повертає назад картку з числом $n+2$. Вінні-Пух і П'ятачок початково мають деякі однакові скінченні набори карток з натуральними числами. Незалежно один від одного вони використовують автомат на своїх картках, доки це можливо. Доведіть, що після завершення усіх операцій або вони знову матимуть однакові набори, або принаймні у одного з них є пара однакових карток.

(Максим Чорний)

***Розв'язання*.** Нехай $F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, n \geq 1$ – послідовність чисел Фібоначчі. Тоді автомат зберігає суму чисел Фібоначчі, що відповідають номерам на картках.

<u>*Лема*</u>. $F_n = 1 + F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \ldots, n \in N,$ де сума закінчується на F_1 або F_2.

<u>*Доведення*</u>. ММІ для парних і непарних n. База очевидна. Якщо $F_n = 1 + F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \ldots$, то

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = 1 + F_{n+1} + (F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \ldots),$$

що завершує крок індукції.

Нехай наприкінці гри у Вінні-Пуха і П'ятачка залишилися різні набори і жоден з них не має пар однакових карток. Позначимо множину карток Вінні-Пуха, яких немає у П'ятачка $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_k = a\}$, а карток П'ятачка, яких немає у Вінні-Пуха - $B = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_l = b\}$. Очевидно, що A і B неперетинні та непорожні. Оскільки за умовою можливих ходів більше немає,

$$a_{i+1} \geq a_i + 2, b_{j+1} \geq b_j + 2. \qquad \textbf{(*)}$$

Неважко зрозуміти, що $\sum_{i=1}^{k} F_{a_i} = \sum_{i=1}^{l} F_{b_l}$. Без обмеження загальності вважаємо, що $a < b$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{k} F_{a_i} = \sum_{i=1}^{l} F_{b_l} \geq F_b = 1 + F_{b-1} + F_{b-3} + F_{b-5} + \ldots \geq$$

$$\geq 1+F_a+F_{a-2}+F_{a-4}+\ldots \geq 1+\sum_{i=1}^{k} F_{a_i}$$

Остання нерівність є наслідком (*).

Отже, маємо суперечність. Відтак, наше припущення неправильне і виконується одна з двох шуканих альтернатив.

4.1. Спочатку на дошці написано два натуральних числа. На кожному кроці серед чисел на дошці обираються усі можливі числа a та b такі, що $a \leq b$(рівність означає, що можна брати одне і те саме число двічі), знаходяться усі відповідні суми $a+b+(a, b)$, де через (a, b) позначений найбільший спільний дільник чисел a та b, і усі числа на дошці негайно заміняються цими сумами. Доведіть, що на якомусь кроці принаймні одне число з'явиться на дошці більше ніж один раз.

Розв'язання. Якщо обрати два числа x та y, тоді число $x+y+(x, y)$ буде на дошці на наступному кроці. Якщо обрано число x разом із собою, тоді число $x+x+(x, x)=3x$ буде на дошці на наступному кроці. Покажемо, що два однакових числа з'являться на дошці не пізніше, ніж після другого кроку. Припустимо, що початкові числа n та m та числа $n+m+(n, m)$, $3n$ та $3m$, що з'являються на наступному кроці, усі різні. Обираючи число $n+m+(n, m)$ разом із собою, отримуємо

$$3\big(n+m+(n, m)\big)=3n+3m+3(n, m).$$

Обираючи $3n$ та $3m$, отримуємо

$$3n+3m+(3n, 3m).$$

Оскільки $(3n, 3m)=3(n, m)$, одне і те ж саме число з'явиться на дошці після другого кроку.

10 клас

1. Задано деяке натуральне n, $3 \leq n \leq 1000$. У послідовності чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ суми кожних n, сусідніх членів дорівнюють 2017. Для якої максимальної кількості членів такої послідовності може виконуватись рівність $a_i = i$?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: для $n-1$.

Розв'язання. Покладемо для $i=\overline{1, n-1}$ $a_i = i$, $a_n = 2017-(1+2+\ldots+n)$, а далі послідовність продовжується періодично з періодом n. Таким чином для $(n-1)$-го члена послідовності можуть справджуватися потрібні рівності.

Очевидно, що ця послідовність періодична з періодом n. Припустимо, що можна для більшої кількості членів можливі бажані рівності. Найбільша можлива кількість – це n, тому що послідовність приймає максимум n різних значень. Нехай, існує така послідовність. Тоді усі такі члени послідовності (їх значення співпадають з номерами) мають різні остачі при ділення на n, та йдуть поспіль.

Якщо n непарне, то сума цих членів кратна n, і одночасно дорівнює 2017 -- просте число, що неможливо.

Якщо n парне, то сума цих членів кратна $\frac{1}{2}n$, і одночасно дорівнює 2017 -- просте число, що неможливо.

2. Знайдіть усі функції $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ такі, що $\forall x, y \in \mathrm{R}$ справджується рівність:

$$f(x+f(f(y)))=y+f(f(x)).$$

(Андрій Анікушин)

<u>Відповідь</u>: $f(x)=x$.
<u>Розв'язання</u>. Для зручності перепишемо задане рівняння таким чином

$$f(y+f(f(x)))=x+f(f(y)).$$

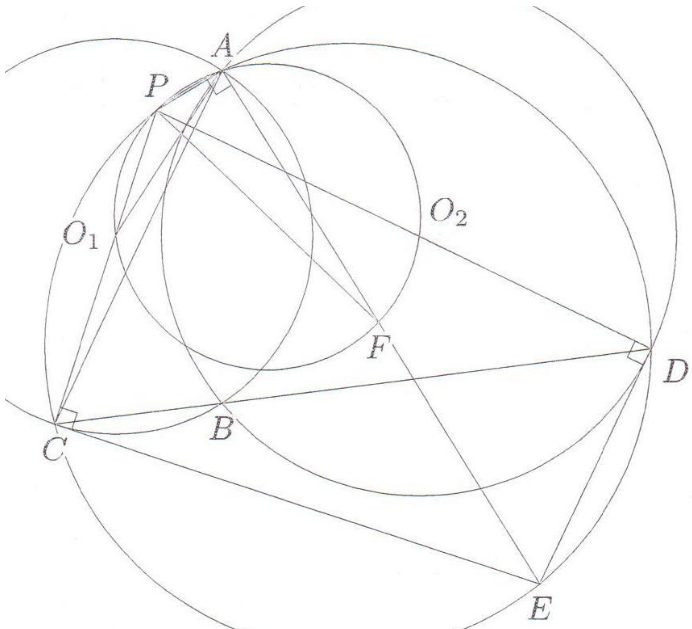
Подіємо функцією f на задану в умові рівність і матимемо, що

$$f(f(y+f(f(x))))=f(x+f(f(y)))=y+f(f(x)).$$

При фіксованому x значення $y+f(f(x))$ пробігає усю дійсну вісь. Тому з останньої рівності маємо, що $\forall x:\ f(f(x))=x$. Але тоді початкове співвідношення можна записати як $f(y+x)=x+y$ або $f(x)=x$.

3. Кола w_1 та w_2 з центрами у точках O_1 та O_2 відповідно перетинаються в точках A та B. Пряма, що проходить через точку B, перетинає кола w_1 та w_2 у точках C та D, відмінних від B. Дотичні до кіл w_1 та w_2 у точках C та D перетинаються в точці E. Пряма EA перетинає описане коло w трикутника AO_1O_2 в точці F. Доведіть, що довжина відрізку EF дорівнює діаметру кола w.

(Вовченко В., Плотніков М.



<u>Рис. 12</u>

<u>Розв'язання</u>. Позначимо через P -- точку перетину прямих CO_1 і DO_2. Помітимо, що P лежить на w. Справді (рис. 12)

$$\angle PO_1A=180°-\angle CO_1A=180°-2(180°-\angle ABC)=$$
$$=180°-2\cdot\angle DBA=180°-\angle DO_2A=\angle PO_2A,$$

де ми використали, що $B\in CD$. Ці рівності виписуються для наведеного розташування елементів, для усіх інших можна виписати аналогічні або скористатися орієнтованими кутами. Очевидно, що $PCED$ вписаний, більше того, A лежить на його описаному колі. Це так, оскільки

$$2\angle PCA=\angle PO_1A=\angle PO_2A=2\angle PDA.$$

Тому оскільки $\angle O_1CE=\angle O_2DE=90°$, то отримуємо $\angle PAF=90°$, звідки PF -- діаметр w. Отже достатньо показати, що $PF=FE$. Очевидно, що $\angle PO_1A=\angle PFA$ і $\angle PCA=\angle PEA$. Але $\angle PO_1A=2\angle PCA$, тому $\angle PFA=2\angle PEA$, а це означає, що ΔPFE рівнобедрений.

4. Для яких натуральних n на ребрах правильної n–кутної призми можна розставити натуральні числа від 1 до $3n$ (на кожному ребрі ставиться рівно одне число і кожне використовується рівно 1 раз) таким чином, щоб сума усіх чисел що оточують кожну грань була однаковою?

(Богдан Рубльов)

***<u>Відповідь</u>*:** тільки для $n=4$.
<u>Розв'язання</u>. Наприклад задане значення n задовольняє умову. Нехай сума чисел кожної грані дорівнює S, усього граней $n+2$ – дві основи, решта бічні. Основи обмежені кожна n ребрами, а

кожна бічна грань – 4 ребрами. Якщо додати усі значення по кожній грані, то при такому додавання кожне ребро сумується двічі, таким чином маємо таку рівність:

$$(n+2)S = 2\cdot(1+2+3+\ldots+3n) = 3n(3n+1)\,. \qquad \textbf{(1)}$$

З цієї рівності зрозуміло, що повинно виконуватись умова

$$3n(3n+1) \vdots (n+2)\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Крім того, спробуємо оцінити суму чисел на бічних гранях, тут кожна бічне ребро додається двічі, а кожне ребро в основах – одного разу. Тому:

$$nS = 2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{3n}) \le$$
$$\le 2\cdot((2n+1)+(2n+2)+\ldots+(3n))+(1+2+\ldots+2n) = (2n+1+3n)\cdot n+\tfrac{1}{2}\cdot 2n(2n+1) =$$
$$= n(5n+1)+n(2n+1) = n(7n+2)\text{, або}$$
$$S \le 7n+2\,. \qquad \textbf{(3)}$$

Якщо сюди підставити значення S з рівності **(1)**, отримаємо нерівність для n:

$$\tfrac{3n(3n+1)}{n+2} \le 7n+2 \iff 9n^2+3n \le 7n^2+14n+2n+4 \iff 2n^2-13n-4 \le 0\,.$$

Розв'яжемо цю квадратну нерівність: $\frac{13-\sqrt{201}}{4} \le n \le \frac{13+\sqrt{201}}{4}$, з умови натурального $n \ge 3$ маємо такий висновок: $3 \le n \le 6$. Тепер ці n, що залишилися перевіримо на умову подільності **(2)**:

Значення $n=3$ $9\cdot 10$ ділиться на 5 – умову задовольняє.

Значення $n=4$ $12\cdot 13$ ділиться на 6 – умову задовольняє.

Значення $n=5$ $15\cdot 16$ не ділиться на 7 – умову не задовольняє.

Значення $n=6$ $18\cdot 19$ не ділиться на 8 – умову не задовольняє.

Таким чином шукана розстановка чисел може бути лише при $n=3$ та $n=4$.

Спочатку наведемо приклад для $n=4$ – рис. 13.

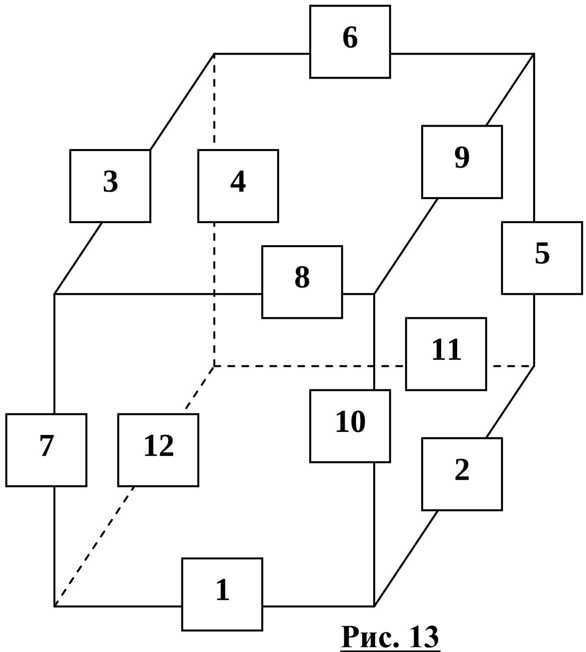


Рис. 13

А от для $n=3$ відповідного приклада також не існує. Покажемо це.

Суму чисел S кожної грані можна знайти з рівності $5S = 2\cdot(1+2+\ldots+9) = 90$, тобто $S=18$.

Позначимо числа на ребрах, як це показане на рис. 14. Тоді маємо такі п'ять рівностей – суми чисел по кожній грані дорівнює 18.

$$x+y+z=18,\ a+b+c=18,\ a+m+x+k=18,\ b+n+y+k=18,\ c+n+z+m=18.$$

Додамо третє та четверте рівняння і віднімемо п'яте:

$$a+m+x+k+b+n+y+k-c-n-z-m=18 \Rightarrow$$
$$a+x+2k+b+y-c-z=18,$$

з перших двох рівнянь підставимо такі значення: $x+y=18-z$, $a+b=18-c$, і одержимо, що $18-z+18-c+2k-c-z=18$ звідки $9+k=z+c$.

Внаслідок симетричності, аналогічно одержимо, що:

$$9+m=b+y \text{ та } 9+n=a+x\,.$$

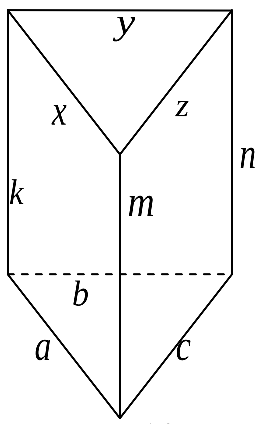


Рис. 14

З останні трьох рівнянь стає зрозумілим, що жодне з чисел не може дорівнювати 9. Бо якщо цьому значенню дорівнює, наприклад, k, то $z+c=18$, що неможливо. Якщо, наприклад, $a=9$, то з рівності $9+n=a+x$ маємо $n=x$, що так само призводить до суперечності, що усі числа різні. Таким чином одержана суперечність завершує доведення не можливості для трикутної призми.

4.1. У країні деякі міста з'єднані дорогою. Кажемо, що місто A *належить циклу довжини* n, якщо можна виїхати з міста A, проїхати через рівно $n-1$ інших попарно різних міст та повернутися назад у A. Відомо, що кожне місто у країні належить циклу довжини 4 та також циклу довжини 5. Чи правда, що принаймні одне місто належить циклу довжини 3?

Відповідь. Ні.

Розв'язання. Нехай у країні 10 міст і нехай вони з'єднані дорогами як на рис. 15. Тоді кожне місто належить циклу довжини 5 та також циклу довжини 4. З іншої сторони, жодних циклів довжини 3 немає.

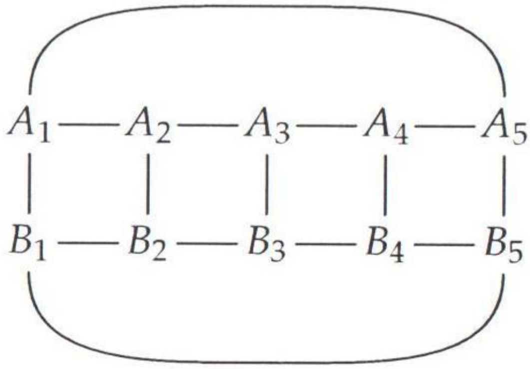


Рис. 15

11 клас

1. Знайти усі невід'ємні розв'язки системи

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=24, \\ x^2+y^2+z^2=12. \end{cases}$$

(Олександр Кукуш)

Відповідь. $x=y=z=2$.

Розв'язання. Покажемо, що наведений розв'язок буде єдиним.
За нерівністю Коші-Буняковського маємо невід'ємних x, y, z:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=(x\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+y\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}+z\sqrt{z}\cdot\sqrt{z})^2\le(x^3+y^3+z^3)(x+y+z)\le$$
$$\le(x^3+y^3+z^3)\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \Rightarrow\ (\tfrac{x^2+y^2+z^2}{3})^3\le(\tfrac{x^3+y^3+z^3}{3})^2.$$

Рівність досягається лише тоді, коли всі $x=y=z$. Для шуканих розв'язків системи остання нерівність набуває виду $64=4^3\le 8^2=64$. Отже, досягається рівність. Тому шуканий розв'язок системи єдиний, і це будуть числа $x=y=z=2$.

2. У трикутнику ABC проведені медіана CM та бісектриса BL, що перетинаються в точці O. На промені AO, що перетинає сторону BC у точці K, за точку K, відкладено відрізок $KT=KC$, на промені BC за точку C відкладено відрізок $CN=BK$. Доведіть, що чотирикутник $ABTN$ вписаний тоді і тільки тоді, коли $AB=AK$.

(Владислав Юрашев)

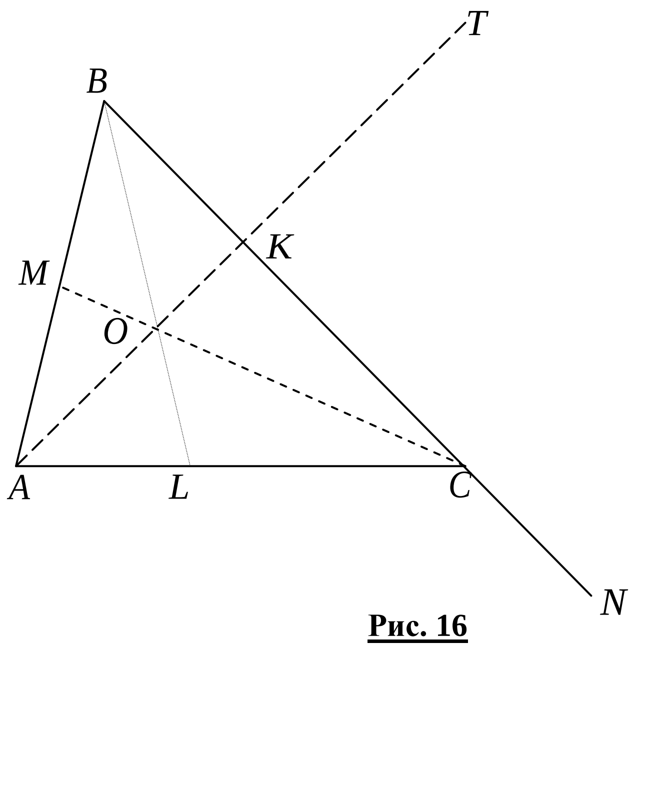


Рис. 16

Розв'язання. За теоремою Чеви (рис. 16):

$$\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AL}{LC}=1 \text{ або } \frac{CK}{KB}\cdot\frac{AL}{LC}=1.$$

З властивості бісектриси:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{CL}{LA}=\frac{CK}{KB}\ \Rightarrow\ AB=\frac{BC\cdot KB}{KC}.$$

Якщо $AB = AK$, то $AK = \frac{BC \cdot KB}{KC}$, звідси $AK \cdot KT = \frac{BC \cdot KB}{KC} \cdot CK = BC \cdot BK = KN \cdot BK$, звідки чотирикутник $ABTN$ вписаний.
Повністю аналогічно з останньої рівності, що рівносильна вписаності $ABTN$, отримаємо рівність відрізків $AB = AK$.

3. Нехай (a_n), $n \ge 0$ – послідовність натуральних чисел, така що кожен наступний її член a_n, $n \ge 1$, утворюється з попереднього члена в такий спосіб: між кожними двома сусідніми цифрами числа a_{n-1} вставляють цифру нуль. Доведіть, що можна вказати нескінченно багато перших членів послідовності a_0, які не містять у своєму записі нулів, і таких, що $a_n \vdots a_{n-1}$ для кожного $n \ge 1$.

(Данила Мисак)

Розв'язання. Покладемо $a_0 = 111$. Тоді при $n \ge 1$ член послідовності a_n складається з $(2^{n+1} + 1)$–ї цифри: спочатку одна цифра 1, далі серія з $(2^n - 1)$ цифр 0, ще одна цифра 1, ще одна серія з $(2^n - 1)$ цифр 0, та остання цифра 1. Аналогічно, член a_{n-1} складається з трьох одиниць, між якими містяться серії з $(2^{n-1} - 1)$ нуля.
Розглянемо число, що складається з шести цифр 1 та $5 \cdot (2^{n-1} - 1)$ нулів: між кожною сусідньою парою одиниць міститься серія з $(2^{n-1} - 1)$ нуля. Якщо відняти від цього числа член послідовності a_{n-1}, то отримаємо цей же член послідовності, в кінець якого дописано $3 \cdot 2^{n-1}$ нулів. Якщо ж натомість відняти a_n, то отримаємо цей же член a_n, у кінець якого дописано 2^{n-1} нулів. Тому можна записати таку рівність:

$$a_n \cdot (10^{2^{n-1}} + 1) = a_{n-1} \cdot (10^{3 \cdot 2^{n-1}} + 1) = a_{n-1} \cdot ((10^{2^{n-1}})^3 + 1) =$$
$$= a_{n-1} \cdot (10^{2^{n-1}} + 1)((10^{2^{n-1}})^2 - 10^{2^{n-1}} + 1) \Rightarrow a_n \vdots a_{n-1}.$$

Якщо тепер для довільного натурального k вибрати перший член послідовності таким: $a_0 = \underbrace{11\ldots1}_{2k+1}$, то з аналогічних міркувань отримаємо, що

$$a_n \cdot (10^{2^{n-1}} + 1) = a_{n-1} \cdot ((10^{2^{n-1}})^{2k+1} + 1) \Rightarrow a_n \vdots a_{n-1}.$$

Внаслідок довільності k таких значень нескінченно багато.

4. Задача 10-4.

4.1. У країні «Острівландія» 2017 островів, деякі з яких з'єднані авіасполученням. Відомо, що, якщо острови «А» та «Б» зєднані авіарейсами з іншим островом «В», то загальна кількість авіарейсів, що виходять з островів «А» та «Б» -- різна. Крім того, з кожного острова є принаймні одна авіалінія в інший острів. Доведіть, що є острів, з якого виходять рівно 2 авіарейси.

Розв'язання. Спочатку припустимо, що з кожного острова виходить не більше одного рейсу. Але тоді, оскільки їх непарна кількість виявиться острів, з якого немає жодного авіарейсу, що суперечить умові.
Далі розглянемо острів A, з якого виходить найбільша кількість авіарейсів – нехай їх рівно $k \ge 2$. Якщо $k = 2$, то твердження доведене. Нехай $k \ge 3$. Розглянемо острови, з яким з'єднаний острів A і позначимо їх через B_1, B_2, … B_k. Оскільки кожна пара з цих островів з'єднана з островом A, то з

кожного з них має виходити різна кількість авіарейсів. Тоді можливі значення для них – це $1; 2; \ldots; k$, оскільки значення 0 бути очевидно не може, і більше k так само не може за вибором міста A. Але тоді в них є k різних можливостей та k різних значень. Тому існує острів B_j, з якого виходить рівно 2 авіарейси.

Для завершення доведення треба показати, що існує можливе розташування островів та їх сполучення, які задовольняють умови. На рис. 17 зображені 9 островів сполучені зображеними авіалініями. Біля кожного з них написана кількість авіаліній, які з нього виходять. Як бачимо там немає двох островів, які мають однакове число, якщо в них є острів, з яким вони обидва з'єднані.

А усі інші острови з'єднані парами. Тоді вони не мають жодного спільного острова для авіасполучення. А тому так само умову не порушують.

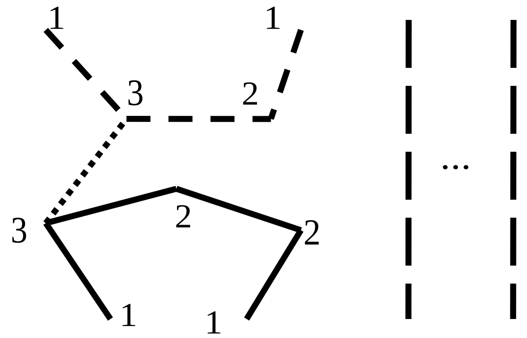


Рис. 17