Міністерство освіти і науки України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXIII Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв’язань задач

1 тур

21 січня 2018 року

«Я знав багато людей, які мали величезні пізнання
і не мали жодної власної ідеї.»
УілсенМізнер

Карташов Микола Валентинович

18 жовтня 1952 – 01 січня 2018

Микола Валентинович народився 18 жовтня 1952 року в місті Очаків, Миколаївської області. Все своє свідоме життя він присвятив науковій та викладацькій роботі у Київському університеті імені Тараса Шевченка. В 1975 році він закінчив механіко-математичний факультет, у 1978 році аспірантуру і став асистентом кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики. У 1986 році, тобто у віці 34 роки, захистив докторську дисертацію, що свідчило про його могутній математичний талант. З 1989 року і до останніх днів залишався професором кафедри.

Основними напрямками наукової діяльності були: теорія стійкості та ергодичності стохастичних процесів марківського типу та їх застосування, граничні теореми для ергодичних випадкових процесів, неоднорідні збурення процесів Маркова. Професор Карташов зробив великий внесок і в актуарну математику, досліджуючи неоднорідні актуарні моделі та моделі теорії ризику. Є автором понад 100 наукових робіт, монографії “Strong Stable Markov Chains” надрукованої в 1996 році. Микола Валентинович був членом редакційної колегії журналу “Теорія ймовірностей та математична статистика”, а також членом спеціалізованої вченої ради факультету.

Микола Валентинович відомий своєю педагогічною діяльністю. Впродовж багатьох років він читав базові курси “Теорія ймовірностей” та “Математична статистика” а також ряд спеціальних курсів. Він підготував більше десяти кандидатів та докторів наук, його учні працюють на факультеті і сьогодні. Є автором класичних підручників з теорії ймовірностей та математичної статистики, збірника задач з теорії ймовірностей, за якими буде вчитися ще не одне покоління студентів. Загалом Микола Валентинович є автором понад 10 підручників та навчальних посібників.

Багато років професор Карташов був членом журі Республіканської учнівської олімпіади з математики, автором задач олімпіад та підручників, що присвячені математичним олімпіадам в Україні.

Микола Валентинович назавжди залишиться в історії української науки, механіко-математичного факультету, кафедри теорії ймовірностей та в нашій пам’яті як талановитий вчений, педагог та хороша і порядна людина, що ніколи не відступалась від своїх принципів та не зраджувала власним високим стандартам.

7 клас

1. Андрій написав чотирицифрове число. Олеся викреслила в ньому останню цифру і виявилося, що різниця початкового і отриманого чисел дорівнює 2018. Яке число написав Андрій? Вкажіть усі можливі відповіді.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 2242.

Розв’язання. Нехай Андрій написав число $\overline{abcd}$, тоді $\overline{abcd}-\overline{abc}=2018$. Залишається підібрати відповідні цифри. Очевидно, що $a=2$ або $a=3$.

При $a=3$ маємо, що $\overline{3bcd}-\overline{3bc}>3000-399>2018$, таким чином $a=2$ і $\overline{2bcd}-\overline{2bc}=2018$. Тепер аналогічно маємо, що $b=2$ або $b=3$.

При $b=3$ маємо, що $\overline{33cd}-\overline{33c}>3300-339>2018$, таким чином $b=2$ і $\overline{22cd}-\overline{22c}=2018$. Тепер аналогічно маємо, що $c=3$ або $c=4$.

При $c=4$ маємо, що $\overline{224d}-\overline{224}>2240-224=2016$, таким чином перший шуканий розв'язок має такий вигляд: $2242-224=2018$.
При $c=3$ маємо, що $\overline{223d}-\overline{223}<2239-223=2016$, таким чином знайдений розв'язок єдиний. Зрозуміло, що аналогічно можна знайти більш простим перебором.

<u>Альтернативне розв'язання</u>. Нехай Андрій написав число $\overline{abcd}$, тоді $\overline{abcd}-\overline{abc}=2018$. Остання рівність рівносильна такій: $10\overline{abc}+d-\overline{abc}=2018 \Leftrightarrow 9\overline{abc}+d=2018$. Оскільки число 2018 не ділиться на 9, та $0\le d\le 9$, то число d є остачею, а $\overline{abc}$ -- неповною часткою числа 2018 від ділення на 9. Помітимо, що $2018=9\cdot 224+2$. Таким чином, $\overline{abcd}=2242$.

2. Відомо, що книжкова полиця вміщає 9 однакових товстих книг, але 10-та книга вже не влазить. Так само на неї можна поставити 15 однакових тонких книг, а 16-та вже не влізе. Чи можливо, щоб на полиці помістилися одночасно:

а) 6 товстих та 5 тонких книг?
б) 7 товстих та 5 тонких книг?

(Богдан Рубльов)

<u>Відповідь</u>: ***а)*** так, вміститься за будь-яких умов; ***б)*** ні.
<u>Розв'язання</u>. Запишемо умову задачі таким чином, позначимо ширину полиці через S, ширину великої книги -- x, малої книги -- y. тоді справджуються такі обмеження:

$$9x\le S<10x \text{ та } 15y\le S<16y \Leftrightarrow \tfrac{1}{10}S<x\le\tfrac{1}{9}S \text{ та } \tfrac{1}{16}S<y\le\tfrac{1}{15}S.$$

а) Запишемо, які максимальну ширину займають ці книги

$$6x+5y\le\tfrac{6}{9}S+\tfrac{5}{15}S=S.$$

б) Аналогічно покажемо, що цей набір книг не помістяться на полиці:

$$7x+5y>\tfrac{7}{10}S+\tfrac{5}{16}S=\tfrac{56+25}{80}S>S.$$

3. На конференцію приїхали по декілька представників фірм-конкурентів по виробництву гри "Overwatch", при цьому, усі представники різних фірм є конкурентами. Відомо, що у кожного учасника конференції рівно 2018 конкурентів серед усіх інших учасників. Яка найбільша кількість учасників могла брати участь в конференції?

<u>Відповідь</u>: 4036.
<u>Розв'язання</u>. Помітимо, що з умови випливає, що від кожної фірми прибула однакова кількість учасників. Дійсно, якщо від деяких двох фірм прибула різна кількість учасників, то в них стане різна кількість конкурентів. Позначимо через m кількість фірм, що беруть участь в конференціх, і в кожній з них по k членів. Тоді кількість конкурентів кожного учасника конференції дорівнює $(m-1)k$. Так само неважко зрозуміти, що загальна кількість учасників конференції складає mk. Оскільки виконується умова $(m-1)k=2018$ або $mk=2018+k$. Таким чином найбільша кількість учасників буде при найбільшому значенні k, а це значення дорівнює $k=2018$ при $m=2$. Таким чином максимальна кількість учасників конференції – це 4036.

4. Всередині трикутника ABC обрано точку P так, що $BC=AP$ та $\angle APC=180^\circ-\angle ABC$. На стороні AB існує точка K, для якої $AK=KB+PC$. Доведіть, що $\angle AKC=90^\circ$.

(Данило Хілько)

***Розв'язання*.** Відкладемо на продовжені променя AB за точку B таку точку T, для якої $BT = PC$ (рис. 1). Тоді $\Delta TBC = \Delta CPA$ за двома сторонами та кутом між ними. Звідси $TC = CA$. так само маємо, що

$$AK = KB + PC = KB + BT = KT.$$

Таким чином в рівнобедреному ATC відрізок KC є медіаною, а тому й висотою. Звідси й випливає, що $KC \perp AB$, що й треба було довести.

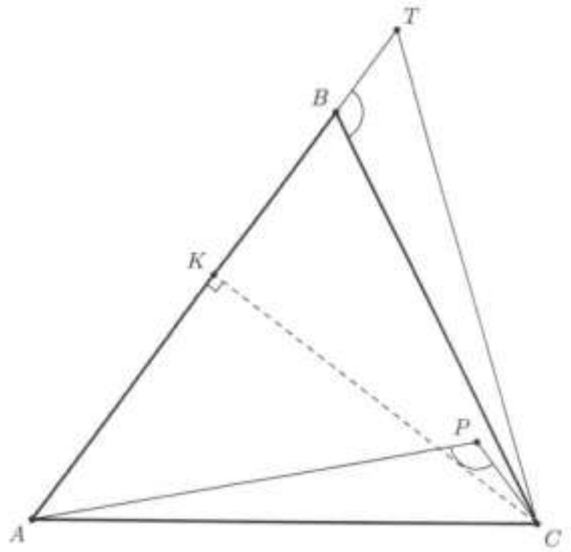

Рис. 1

3.1. У клубі присутні декілька джентльменів. Кожні двоє – або друзі, або вороги. Відомо, що в кожного з джентльменів рівно 4 вороги. Крім того, для кожного з них ворог його друга є його ворогом. Яка кількість джентльменів може бути присутня в клубі?

***Відповідь*:** 5, 6 або 8 джентльменів.

***Розв'язання*.** Помітимо, що з умови випливає, що в кожного з джентльменів рівна кількість друзів. Дійсно, нехай всього у клубі n джентльменів. У кожного з них рівно 4 вороги, отож рівно $n-5$ друзів.

Розглянемо деякого джентльмена A_1. Позначимо B_1, B_2, B_3, B_4 його ворогів. Оскільки кожен друг A_1 є ворогом B_1, то у A_1 не більше трьох друзів, оскільки у B_1 рівно 4 вороги і не може бути більше. Розглянемо такі випадки.

Випадок 1. У A_1 є 3 друга. Позначимо їх друзів A_2, A_3, A_4. У цьому випадку всього у клубі 8 джентльменів і ця ситуація можлива, кожні двоє з джентльменів A_1, A_2, A_3, A_4 дружать між собою, кожні двоє з джентльменів B_1, B_2, B_3, B_4 також товаришують між собою, а кожна пара A_i та B_j є ворогами.

Випадок 2. У A_1 є 2 друга. Позначимо його друзів A_2, A_3. У цьому випадку всього у клубі 7 джентльменів. Помітимо, що кожен з друзів A_1 є ворогом джентльмену B_j. Тоді у кожного з джентльменів A_2, A_3 вже є по 4 вороги, тобто вони мають бути друзями один одному. Розглянемо джентльмена B_1. Без обмеження загальності можемо вважати, що його друзі – це B_2, B_3. Аналогічно попередньому міркуванню, можемо показати, що B_2, B_3 є друзями. Тоді у B_4 друзів взагалі немає. Тому це й випадок неможливий.

Випадок 3. У A_1 є 1 друг. У цьому випадку всього у клубі 6 джентльменів. Цей випадок можливий. Нехай, наприклад, друзями є такі пари: (A_1, A_2), (B_1, B_2) та (C_1, C_2). Усі інші є ворогами один одному. Легко бачити, що цей приклад задовольняє умові.

Випадок 4. У A_1 немає друзів. Тоді 5 джентльменів, які усі між собою ворогують задовольняють умову задачі.

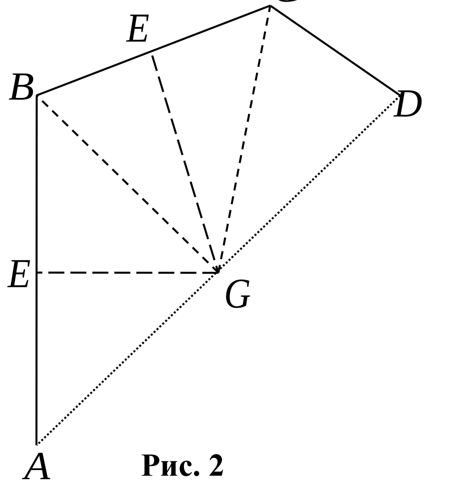

Рис. 2

4.1. В чотирикутнику $ABCD$ точка E – середина сторони AB, точка F – середина сторони BC, точка G – середина AD. Виявилось, що відрізок GE перпендикулярний до AB, а відрізок GF – до відрізку

BC. Знайдіть величину кута GCD, якщо відомо, що $\angle ADC = 70^\circ$.

Відповідь: $\angle GDC = 70^\circ$.

Розв'язання. Оскільки відрізок GE є у ΔABG і висотою, і медіаною (рис. 2), тому він є рівнобедреним, звідки $AG = GB$. Аналогічно рівнобедреним є ΔCBG, тому ΔABG $BG = GC$. Крім того, за умовою точка G є серединою відрізка AD. Таким чином, маємо, що $DG = AG = BG = CG$, тобто ΔCGD також є рівнобедреним, звідки $\angle GCD = \angle GDC = 70^\circ$.

8 клас

1. Для натуральних чисел m та n порівняйте два числа $A = m^{526} + n^{526}$ та $B = (m+n)(m^2+n^2)(m^4+n^4)(m^8+n^8)\ldots(m^{128}+n^{128})$.

Відповідь: $A < B$ якщо m= n =1, в усіх інших випадках $B < A$.

Розв'язання. Якщо $m = n$, то $A = 2m^{526}$, $B = 2m \times 2m^2 \times 2m^4 \times \ldots \times 2m^{128} = 2^8 m^{255} > A = 2m^{526} \Leftrightarrow$ $m < 2^7 = 128$, тому при $m < 2^7 = 128$ маємо $A < B$, при $m = 128$ $A = B$, інакше – $A > B$.
Нехай тепер без обмеження загальності $m > n$. Тоді розглянемо перетворення:

$$B \le (m-n)B = (m-n)(m+n)(m^2+n^2)(m^4+n^4)\ldots(m^{128}+n^{128}) =$$
$$= (m^2-n^2)(m^2+n^2)(m^4+n^4)\ldots(m^{128}+n^{128}) = (m^4-n^4)(m^4+n^4)\ldots(m^{128}+n^{128}) =$$
$$= m^{256} - n^{256} < m^{526} + n^{526} = A \Rightarrow B < A.$$

2. Вчитель писав на дошці цифри $123\ldots9123\ldots9123\ldots$ доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали в таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по 2 цифри таким чином: або дві перші цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, або дві останні цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 3, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: перемагає Олеся.

Розв'язання. Очевидно, що оскільки нас цікавить лише подільності на 3, то можна замінити усі числа таким чином: $1, 4, 7 \to 1$, $2, 5, 8 \to 2$ та $3, 6, 9 \to 3$ і нічого в умові задачі не зміниться. Тоді після $2014 : 2 = 1007$ ходів на дошці буде записане чотирицифрове число і останній хід робить Олеся. Зрозуміло, що записаними будуть деякі 4 цифри, що утворюють чотирицифрове число, які з самого початку йшли поспіль. Тобто можливий один з таких варіантів: 1231, 2312 або 3123. В кожному з цих варіантів є пара цифр, що утворює число 12, саме їх і має лишити Олеся для перемоги.

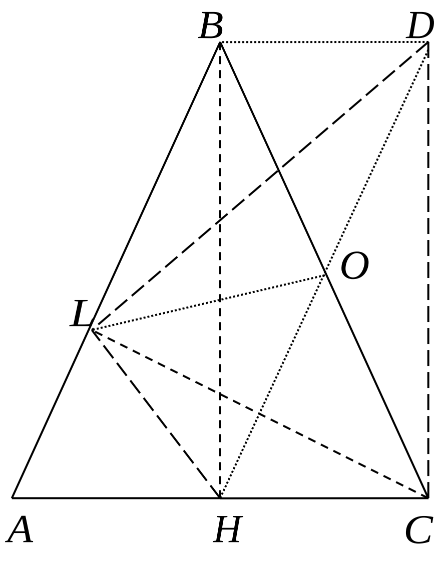

Рис. 3

3. У рівнобедреному трикутнику ABC з вершиною в точці B проведені висоти BH та CL. Точка D така, що $BDCH$ – прямокутник. Знайдіть величину кута DLH.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $90°$.
Розв'язання. Позначимо через O – точку перетину діагоналей прямокутника $HBDC$ (рис. 3). Оскільки ΔCBL – прямокутний, то $BO = LO = DO$, а тому й $HO = LO = DO$. Звідси випливає, що ΔDHL також прямокутний з гіпотенузою DH, тому $\angle DLH = 90°$.

4. Відомо, що книжкова полиця вміщає 9 однакових товстих книг, але 10-та книга вже не влазить. Так само на неї можна поставити 15 однакових тонких книг, а 16-та вже не влізе. Чи можливо, щоб на полиці помістилися одночасно:

а) 7 товстих та 5 тонких книг?

б) 6 товстих та 6 тонких книг?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: ***а)*** ні; ***б)*** може вміститися.
Розв'язання. а) Дивись розв'язання **задачі 2 *б)* 7 класу**.

б) Запишемо умову задачі таким чином, позначимо ширину полиці через S, ширину великої книги -- x, малої книги -- y. тоді справджуються такі обмеження:

$$9x \le S < 10x \text{ та } 15y \le S < 16y \Leftrightarrow \tfrac{1}{10}S < x \le \tfrac{1}{9}S \text{ та } \tfrac{1}{16}S < y \le \tfrac{1}{15}S.$$

Перепишемо ці нерівності таким чином:

$$\tfrac{72}{720}S < x \le \tfrac{80}{720}S \text{ та } \tfrac{45}{720}S < y \le \tfrac{48}{720}S.$$

виберемо такі значення для ширини книг: $x = \frac{73}{720}S$ та $y = \frac{46}{720}S$. тепер переконаємось, що за таких умов книги влізуть на полицю:

$$6x + 6y = \tfrac{438}{720}S + \tfrac{276}{720}S = \tfrac{714}{720} < S.$$

5. Капабланка та Альохін вирішили зіграти шаховий матч з 16 партій за такими правилами. Переможець першої партії отримував $1 = 3^0$ песо, переможець другої – $3 = 3^1$ песо, переможець третьої партії отримував $9 = 3^2$ песо і так далі. Якщо партія завершувалася внічию, то вони ділили призовий фонд партії навпіл. Виявилося, що по завершенню матчу Альохін заробив на 2018 песо більше, ніж Капабланка. Скільки партій виграв кожний з гравців?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: вони виграли по 3 партії.
Розв'язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що за нічию кожний отримував по 0 песо. Тоді Альохін у k-ії партії міг заробити $a_k \cdot 3^{k-1}$, де $a_k \in \{-1; 0; 1\}$. Покажемо, що його здобуток після завершення k-ії партії міг бути від $A_k = 3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{k-1}$ до $(-A_k)$. При цьому кожний можливий результат забезпечується єдиним варіантом результатів партій. Дійсно, для $k = 1, 2$ все очевидно перебором. Нехай після k партій він міг набрати єдиним способом від $(-A_k)$ до A_k. Додамо до кожного результату рівно кожний з результатів в $(k+1)$-й партії. Якщо то нічия, то усі результати збережуться. Якщо перемога Альохіна, то він набере усі результати від $3^k - A_k$ до $3^k + A_k$. Оскільки

$$3^k - A_k = 3^k - 3^{k-1} - 3^{k-2} - \ldots - 3 - 1 = A_k + 1 = 3^{k-1} + 3^{k-2} + \ldots + 3 + 1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$3^k = 2 \cdot 3^{k-1} + \ldots + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot 3^{k-1} + \ldots + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 3 =$$

$$3^k = 2 \cdot 3^{k-1} + \ldots + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3^{k-1} + \ldots + 3 \cdot 3^3 = 2 \cdot 3^{k-1} + 3 \cdot 3^{k-2} = 3^k,$$

то результат після $(k+1)$-ї партії так само заповнює усі значення від $(-A_{k+1})$ до A_{k+1} і кожний результат визначається єдиною комбінацією результатів партії.
Далі вже можна скласти таблицю результатів, які може досягнути Альохін:

1 партія: $[-1;1]$;	2 партія: $[-4;4]$;
3 партія: $[-13;13]$;	4 партія: $[-40;40]$;
5 партія: $[-161;161]$;	6 партія: $[-404;404]$;
7 партія: $[-1133;1133]$;	8 партія: $[-3320;3320]$.

Таким чином по завершенні 8 партій, усі інші 8 партій завершилися нічиєю. З наведених оцінок не складно отримати шуканий набір результатів:

$$2018=2187-169=2187-243+74=2187-243+81-7=2187-243+81-9+3-1$$

$$\Rightarrow\ 2018=3^7-3^5+3^4-3^2+3^1-3^0.$$

Таким чином вони виграли по 3 партії та дві завершилися внічию.

4.1. Задача 8.4 *а)*.

5.1. Задача 10.3.

9 клас

1. Розв'яжіть систему рівнянь в натуральних числах x, y, z:

$$\begin{cases} x^3-6y^2+27z=132, \\ y^3-9z^2+3x=125, \\ z^3-3x^2+12y=-68. \end{cases}$$

Відповідь: розв’язків не існує.
Розв’язання. Додамо усі три рівняння:

$$(x^3-3x^2+3x)+(y^3-6y^2+12y)+(z^3-9z^2+27z)=189 \Leftrightarrow$$

$$(x^3-3x^2+3x-1)+(y^3-6y^2+3y-27)+(z^3-9z^2+27z-27)=153 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3=153.$$

Далі простим перебором переконуємося, що число 153 єдиним чином подається у вигляді суми трьох кубів натуральних чисел: $153=5^3+3^3+1^3$. Таким чином в останньому виразі значення $(x-1)$, $(y-2)$ та $(z-3)$ слід вибирати з чисел $1; 3; 5$. Знову перебором неважко переконатися, що розв’язків не існує.

2. Вчитель писав на дошці цифри $123\ldots8123\ldots8123\ldots$ послідовно у вказаному порядку доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали в таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по 2 цифри таким чином – перші дві цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, останні дві цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 4, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: перемагає Олеся.

Розв'язання. Очевидно, що оскільки нас цікавить лише подільності на 4, то можна замінити усі числа таким чином: $1,\ 5 \to 1,\ 2,\ 6 \to 2,\ 3,\ 7 \to 3$ та $4,\ 8 \to 4$ і нічого в умові задачі не зміниться. Застосуємо таку стратегію для Олесі. Вона перед ходом Андрія вибирає перші дві цифри та останні дві цифри. І після ходу Андрія та Олесі ці чотири цифри мають бути прибрані. Таким чином, після кожної пари ходів залишається число, всередині якого будуть цифри $1,\ 2$. Саме їх може Олеся залишити після свого останнього ходу і перемогти.

3. Доведіть для додатних чисел нерівність:

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\ge 1.$$

Розв'язання. Доведемо через нерівність Шварца:

$$\left(\tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x}\right)(x+y+z)^2=\left(\tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x}\right)\left(y(2x+y)+z(2y+z)+x(2z+x)\right)\ge$$

$$\ge\left(\sqrt{\tfrac{y}{2x+y}}\cdot\sqrt{y(2x+y)}+\sqrt{\tfrac{z}{2y+z}}\cdot\sqrt{z(2y+z)}+\sqrt{\tfrac{x}{2z+x}}\cdot\sqrt{x(2z+x)}\right)^2=(x+y+z)^2,$$

що й треба було довести.

4. Знайдіть усі трійки чисел $(x,\ y,\ p)$, де $x,\ y$ – натуральні, p – просте, що задовольняють рівність:

$$y(x^2+p)-x(y^2+p)=p.$$

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $(3;\ 2;\ 3)$ та $(p+1;\ 1;\ p)$, де p -- довільне просте число.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину на множники:

$$(yx^2-xy^2)+(yp-xp)=p) \Rightarrow\ yx(x-y)-p(x-y)=p \Rightarrow (yx-p)(x-y)=p.$$

Остання рівність можлива при декількох випадках.

Випадок 1. $yx-p=1,\ x-y=p$. Тоді отримаємо квадратне рівняння: $x=y+p$

$$y(y+p)-p=1 \Rightarrow y^2+yp-p-1=0.$$

Оскільки $y=1$ є коренем цього рівняння, то другий корінь це $y=-p-1$ -- не є натуральним. Таким чином далі знаходимо, що $x=p+1$. Підстановкою в задане рівняння переконуємось, що трійка $(p+1;\ 1;\ p)$ задовольняє умови для довільного простого p.

Випадок 2. $yx-p=-1,\ x-y=-p$. Тоді отримаємо квадратне рівняння: $y=x+p$

$$x(x+p)-p=-1 \Rightarrow x^2+xp-p+1=0.$$

Оскільки $x\in \mathrm{N}$, то дискримінант останнього рівняння має бути квадратом цілого числа: $D=p^2-4(-p+1)=p^2+4p-4$. Розглянемо для яких p справджуються умови:

$$(p+1)^2<p^2+4p-4<(p+2)^2.$$

Права нерівність виконується для усіх p, а ліва нерівність переписується таким чином:

$$p^2+2p+1<p^2+4p-4 \Leftrightarrow 2p>5 \Leftrightarrow p\ge 3.$$

Таким чином треба окремо перевірити значення $p=2$, для усіх інших простих чисел p дискримінант не є квадратом цілого числа. Для $p=2$ маємо, що $D=8$ - так само не є квадратом цілого числа, а тому шуканих натуральних значень x не існує.

Випадок 3. $yx-p=p,\ x-y=1$. Тоді отримаємо рівняння: $x=y+1$ та $yx=2p$. З першого рівняння маємо, що $x>y$, а з другого $y=1$ та $x=2p$ або $y=2$ та $x=p$. Якщо ці умови поєднати, то маємо, що $y=1,\ x=2,\ p=1$ -- суперечність, або $y=2,\ x=p=3$ -- розв'язок.

Випадок 4. $yx-p=-p,\ x-y=-1$. Очевидно, що перше рівняння одразу призводить до суперечності.

5. Дано трикутник ABC, серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає бісектрису трикутника AK у точці P, M – така точка, що $\angle MAC=\angle PCB$, $\angle MPA=\angle CPK$, і точки M та K лежать по різні боки від прямої AC. Доведіть, що пряма AK ділить відрізок BM навпіл.

(Антон Тригуб)

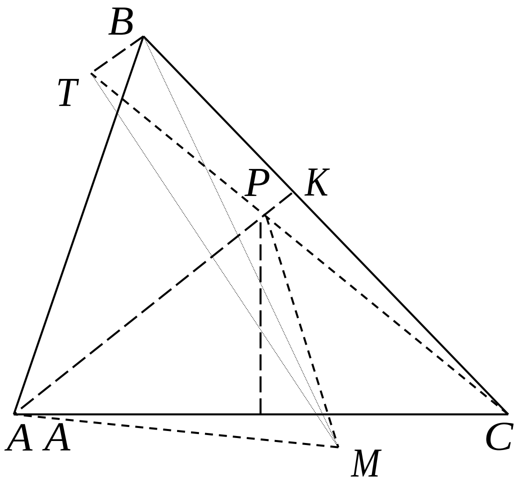

Рис. 4

***Розв'язання*.** Нехай T - точка, що симетрична M відносно AK (рис. 4). Очевидно, що для доведення твердження, досить довести, що $BT||AK$. Помітимо, що точки C, P, T - лежать на одній прямій. Також,

$\angle TAB=\angle TAK-\angle BAK=$
$=\angle MAK-\angle KAC=\angle CAM=\angle TCB,$

звідки чотирикутник $BCAT$ вписаний, і

$\angle TBA=\angle TCA=\angle PAC=\angle PAB,$

звідки і випливає паралельність.

4.1. Задача 11.2.

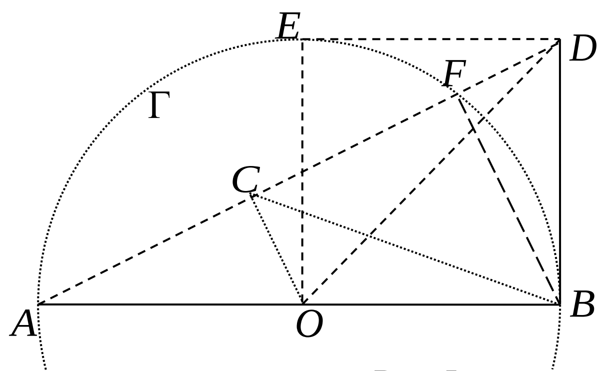

Рис. 5

5.1. Задане коло Γ з центром у точці O та діаметром AB. $OBDE$ – квадрат, F – друга точка перетину прямої AD та кола Γ, C – середина відрізку AF. Знайдіть величину кута OCB.

***Відповідь*:** 45°.

***Розв'язання*.** Оскільки AB – діаметр, то $\angle AFB=90^\circ$, тоді $CO||FB$ як середня лінія. Тому $CO\perp CD$ і чотирикутник $OBDC$ – вписаний. Звідси $\angle OCB=\angle ODB=45^\circ$.

10 клас

1. Розв'яжіть систему рівнянь в цілих числах x, y, z:

$$\begin{cases} x^4+4y^3+6x^2+4y=-137, \\ y^4+4x^3+6y^2+4x=472. \end{cases}$$

***Відповідь*:** $(3,-4)$.

***Розв'язання*.** Додамо ці рівняння:

$$x^4+4y^3+6x^2+4y+y^4+4x^3+6y^2+4x=335 \Leftrightarrow (x+1)^4+(y+1)^4=337.$$

Оскільки $5^4=625>337$, а $3^4+3^4=162<337$. Тому один з доданків обов'язково дорівнює 4, інший доданок – непарний, а тому 3, тобто маємо єдине подання 337 як суму двох четвертих степені цілих чисел: $4^4+3^4=337$. Тобто маємо варіанти: $x+1=\pm4$ та $y+1=\pm3$. Тому залишається перевірити такі пари чисел: $(3,2)$, $(3,-4)$, $(-5,2)$ та $(-5,-4)$.

2. Задача 11.3 *а).*

3. Про деяке натуральне число A відомо, що воно має рівно 2018 натуральних дільників (включно з 1 та самим числом A), та ділиться націло на 2018. Доведіть, що число A не ділиться націло на 2018^2.

(Микола Мороз)

***Розв'язання*.** Нехай $A=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_n^{k_n}$ – канонічний розклад числа A на прості множники, де p_i – різні прості дільники, а k_i – натуральні числа, $i=\overline{1,n}$. З формули про кількість усіх натуральних дільників числа A можна записати, що

$$(k_1+1)(k_2+1)...(k_n+1)=2018.$$

Оскільки ліва частина рівності містить множники, кожен з яких не менший за 2, то існує тільки два випадки:

1) $k_1+1=2018$

2) $(k_1+1)(k_2+1)=2\cdot1009$

Інших випадків не існує, бо число 2018 має в своєму складі тільки два простих співмножники.

З першого випадку отримуємо, що число A має канонічний розклад на прості множники такого виду: $A=p_1^{2017}$, що суперечить тому, що $A \vdots 2018$, оскільки A не може в такому випадку ділитися і на просте число 2, і на просте число 2009.

Отже, $(k_1+1)(k_2+1)=2\cdot1009$, звідки, не порушуючи загальності, $k_1=1$, $k_2=1008$. Отже, $A=p_1p_2^{1008}$, причому з подільності на 2 та 1009 отримуємо, що або $A=2\cdot1009^{1008}$, або $A=1009\cdot2^{1008}$. Але жодне з цих чисел не ділиться на 2018^2, що і треба було довести.

4. У гострокутному трикутнику ABC провели висоти BP і CQ, точка T – точка перетину висот ΔPAQ. Виявилося, що $\angle CTB=90°$. Знайдіть у градусах величину $\angle BAC$.

(Михайло Плотніков)

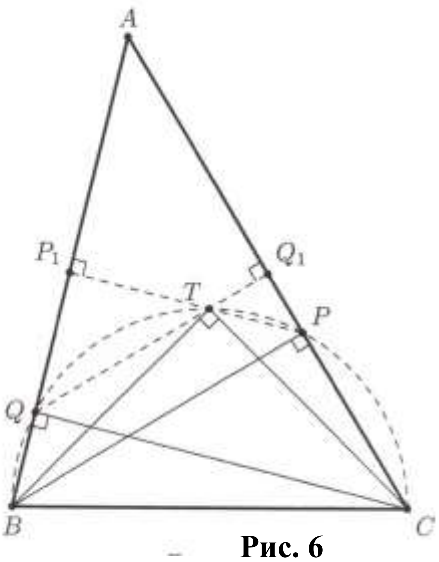

Рис. 6

***Відповідь*:** $45°$.

***Розв'язання*.** З умови випливає, що $\angle BQC=\angle BTC=\angle BPC=90°$, отже точки Q, T, P лежать на колі з діаметром BC, причому саме у такому порядку: B, Q, T, P, C (рис. 6), оскільки ΔABC гострокутний. Звідси

$$\angle QTP=180°-\angle ABP=180°-(90°-\angle BAC)=90°+\angle BAC.$$

З іншого боку, $QT\perp AC$, $PT\perp AB$, $\angle QTP=180°-\angle BAC$. Отже

$$90°+\angle BAC=180°-\angle BAC \Rightarrow \angle BAC=45°.$$

5. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$2\cdot\left(\frac{x}{2x+y}\right)^2+2\cdot\left(\frac{y}{2y+z}\right)^2+2\cdot\left(\frac{z}{2z+x}\right)^2+\frac{9xyz}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}\le 1.$$

(Вадим Митрофанов)

Розв'язання. Зробимо таку заміну: $a=\frac{2x}{2x+y}$, $b=\frac{2y}{2y+z}$, $c=\frac{2z}{2z+x}$, тоді задана нерівність перепишеться таким чином:

$$2\cdot(\tfrac{x}{2x+y})^2+2\cdot(\tfrac{y}{2y+z})^2+2\cdot(\tfrac{z}{2z+x})^2+\tfrac{9xyz}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}=\tfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+\tfrac{9}{8}abc\le 1 \text{ або}$$

$$a^2+b^2+c^2+\tfrac{9}{4}abc\le 2.$$

Розглянемо вираз

$$(\tfrac{1}{a}-1)(\tfrac{1}{b}-1)(\tfrac{1}{c}-1)=(\tfrac{2x+y}{2x}-1)(\tfrac{2y+z}{2y}-1)(\tfrac{2z+x}{2z}-1)=\tfrac{y}{2x}\cdot\tfrac{z}{2y}\cdot\tfrac{x}{2z}=\tfrac{1}{8} \text{ або}$$

$$\tfrac{(1-a)}{a}\cdot\tfrac{(1-b)}{b}\cdot\tfrac{(1-c)}{c}=\tfrac{1}{8}\Leftrightarrow 8(1-a)(1-b)(1-c)=abc\Leftrightarrow 8(1-a)(1-b)(1-c)=abc\Leftrightarrow$$

$$8-8(a+b+c)+8(ab+bc+ca)-8abc=abc\Rightarrow \tfrac{9}{4}abc=2-2(a+b+c)+2(ab+bc+ca).$$

Продовжимо доведення з використанням одержаних співвідношень:

$$a^2+b^2+c^2+\tfrac{9}{4}abc-2=$$

$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+2-2(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-2=$$

$$=(a+b+c)^2-2(a+b+c)\le 0.$$

Остання нерівність справджується за умов $a+b+c\le 2$.

Зробимо такі перетворення:

$$a+b+c=\tfrac{2x}{2x+y}+\tfrac{2y}{2y+z}+\tfrac{2z}{2z+x}=1-\tfrac{y}{2x+y}+1-\tfrac{z}{2y+z}+1-\tfrac{x}{2z+x}=2+(1-\tfrac{y}{2x+y}-\tfrac{z}{2y+z}-\tfrac{x}{2z+x})\le 2$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x}\ge 1.$$

Останню нерівність доведемо через нерівність Шварца:

$$(\tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x})(x+y+z)^2=(\tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x})(y(2x+y)+z(2y+z)+x(2z+x))\ge$$

$$\ge\left(\sqrt{\tfrac{y}{2x+y}}\cdot\sqrt{y(2x+y)}+\sqrt{\tfrac{z}{2y+z}}\cdot\sqrt{z(2y+z)}+\sqrt{\tfrac{x}{2z+x}}\cdot\sqrt{x(2z+x)}\right)^2=(x+y+z)^2,$$

що й треба було довести.

4.1. Задача 9.5.

5.1. Для натуральних чисел m та n порівняйте два числа $A=m^{525}+n^{525}$ та $B=(m+n)(m^2+n^2)(m^4+n^4)(m^8+n^8)\ldots(m^{128}+n^{128})$.

Відповідь: $A<B$.

Розв'язання. Якщо $m=n$, то $A=2m^{525}$, $B=2m\cdot 2m^2\cdot 2m^4\cdot\ldots\cdot 2m^{128}=2^8m^{525}>A$.

Нехай тепер без обмеження загальності $m>n$. Тоді розглянемо вирази:

$$(m-n)A=m^{526}-n^{526}+mn^{525}-nm^{525}=(m^{526}-n^{526})-mn(m^{524}-n^{524})$$

та

$$(m-n)B=(m-n)(m+n)(m^2+n^2)(m^4+n^4)\ldots(m^{128}+n^{128})=$$

$$=(m^2-n^2)(m^2+n^2)(m^4+n^4)\ldots(m^{128}+n^{128})=(m^4-n^4)(m^4+n^4)\ldots(m^{128}+n^{128})=$$

$$=m^{256}-n^{256}>(m^{526}-n^{526})-mn(m^{524}-n^{524})=(m-n)A\Rightarrow B>A.$$

11 клас

1. Чи існує таке значення $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, для якого числа $\sin x$, $\cos x$ та $tg\, x$ утворюють геометричну прогресію?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: існує.

Розв'язання. Запишемо рівність, яка є необхідною та достатньою умовою того, що три числа утворюють геометричну прогресію:

$$\sin x \cdot tg\, x = \cos^2 x.$$

Звідси матимемо, що $\sin^2 x = \cos^3 x \Rightarrow$ позначимо через $t = \cos x \in (0; 1)$, тоді маємо рівняння:

$$1 - t^2 = t^3 \;\Rightarrow\; f(t) = t^3 + t^2 - 1 = 0.$$

Оскільки $f(0) = -1 < 0$ та $f(1) = 1 > 0$, то існує принаймні одне значення $t \in (0; 1)$, для якого $f(t) = t^3 + t^2 - 1 = 0$, а тому шукане значення $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ існує.

2. Знайдіть пари натуральних чисел x, y, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} [x, y] + (x, y) = 2018, \\ x + y = 2018, \end{cases}$$

де через $[x, y]$ та (x, y) позначені НСК та НСД чисел x, y.

(Леонід Бедратюк)

Відповідь: (x, y): або $(1; 2017)$, $(2; 2016)$, $(1009; 1009)$, $(2016; 2)$ та $(2017; 1)$.

Розв'язання. Оскільки $(x, y) \cdot [x, y] = xy$, то перше рівняння системи можна переписати таким чином: $\frac{xy}{(x, y)} + (x, y) = 2018$ або маємо квадратне рівняння відносно (x, y):

$$(x, y)^2 - 2018(x, y) + xy = 0.$$

Його дискримінант, з урахування другого рівняння системи, є

$$D = 2018^2 - 4xy = 2018^2 - 4x(2018 - x) = (2x - 2018)^2.$$

Звідси $x = \frac{2018 \pm (2x - 2018)}{2} \Rightarrow x_1 = x$ та $x_2 = 2018 - x = y$.

Отже одне з чисел співпадає з НСД чисел, а тому на нього ділиться друге число. Нехай, наприклад, $x \le y$, тобто $y = kx$, тому $(k+1)x = 2018$. Таким чином можливі такі варіанти.

Варіант 1. $k + 1 = 2018 \Rightarrow x = 1$ та $y = 2017$.

Варіант 2. $k + 1 = 1009 \Rightarrow x = 2$ та $y = 2016$.

Варіант 3. $k + 1 = 2 \Rightarrow x = 1009 = y$.

3. Для яких натуральних n квадрат $n \times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників $k \times 1$ та одним квадратиком 1×1, де

а) $k = 4$; ***б)*** $k = 8$?

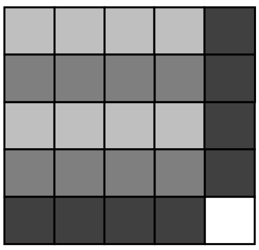

Рис. 7

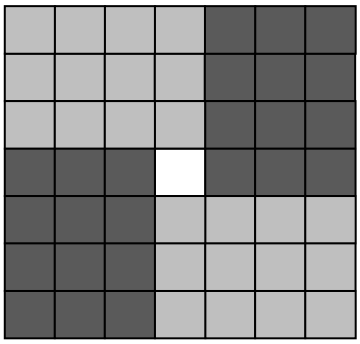

Рис. 8

(Богдан Рубльов)

Відповідь: ***а)*** n -- непарне і більше 4; ***б)*** $n = 8m + 9$ та $n = 8m + 15$, $m \in \mathrm{N}$.

Розв'язання. Для обох пунктів очевидно, що n має бути непарним та більшим від k.

а) Таким чином n -- непарне і більше 4. Покажемо, що усі непарні n задовольняють умову. Те, що довільну смугу $4\times l$ можна заповнити прямокутниками 4×1 -- очевидно. Для 5×5 та 7×7 потрібне заповнення показане на рис. 7–8. Для довільного непарного $n=4m+5$ та $n=4m+7$ достатньо розрізати квадрат $n\times n$ на квадрат 5×5 чи 7×7 та декілька смуг $4\times l$ (рис. 9).

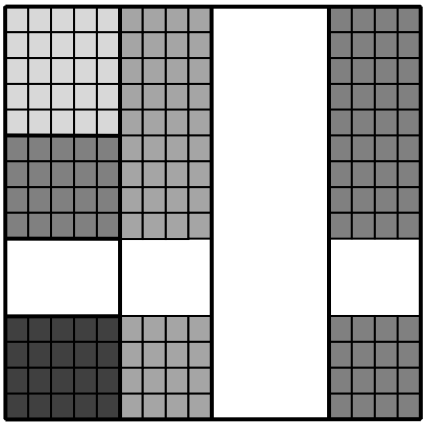

Рис. 9

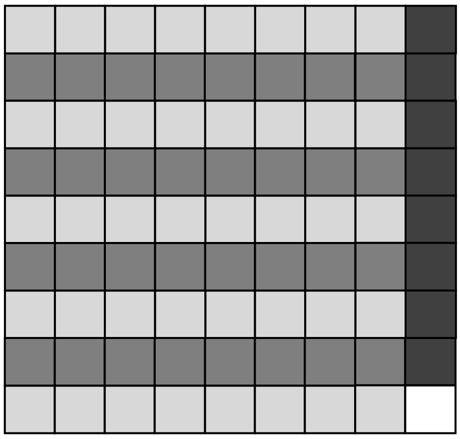

Рис. 10

б) Покажемо, що за аналогічною схемою можна покрити квадрати розміром $n=8m+9$ та $n=8m+15$. Для цього достатньо покрити квадрати 9×9 та 15×15. Далі будь-який квадрат $n\times n$ вказаного розміру можна розрізати на квадрат 9×9 чи 15×15 та декілька смуг розміру $8\times l$ (рис. 10–11).

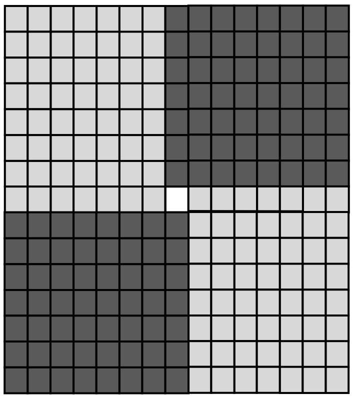

Рис. 11

Тепер покажемо, що квадрати розміром $n=8m+11$ та $n=8m+13$ належним чином покрити не можна. Для квадрату 11×11 розглянемо таке розфарбування на чорні та білі квадрати, як показане на рис. 12. Із 121 квадрату чорними є 65, білими 56, тобто чорних на 9 більше. Кожний прямокутник 8×1, що розташований в такому квадраті, покриває однакову кількість квадратиків чорного та білого кольору. Тому, якби існувало шукане покриття, то кількість чорних та білих квадратиків відрізнялося б рівно на 1. Для загального випадку квадрату $n\times n$ при $n=8m+11$ аналогічне розфарбування так само дасть, що чорних квадратів буде на 9 більше ніж білих.

Аналогічно для випадку 13×13 маємо розфарбування (рис. 13), при якому чорних квадратів 89, білих 80, тобто чорних на 9 більше. Тому шуканого покриття не існує. І для випадку $n\times n$ при $n=8m+13$ так само.

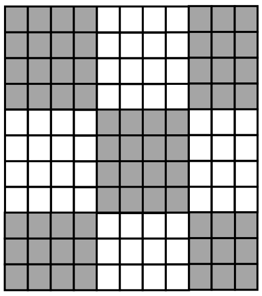

Рис. 12

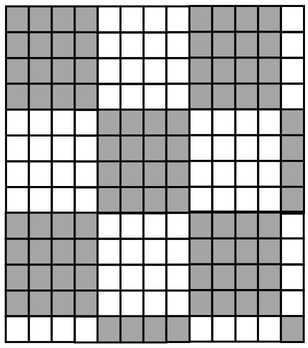

Рис. 13

4. Дано нерівнобедрений ABC, у якого $2AC=AB+BC$. Позначимо через I – центр вписаного в нього кола, K – середину дуги ABC описаного кола. Нехай T – така точка на прямій AC, що $\angle TIB=90°$. Доведіть, що пряма TB дотикається до описаного кола ΔKBI.

(Антон Тригуб)

Розв'язання. Без обмеження загальності вважаємо, що $AB<BC$. Нехай бісектриса $\angle ABC$ вдруге перетинає описане коло трикутника в точці W, а точка M - середина AC. Доведемо, що $BI=IW$. Справді, для цього опустимо з I та W перпендикуляри II_1 та WW_1 на пряму BC (рис. 14). Як відомо, $BW_1=\frac{1}{1}(AB+BC)=AC$, а $BI_1=\frac{1}{2}(AB+BC-AC)=\frac{1}{2}AC$, звідки $BI_1=I_1W_1$ та $BI=WI$.

Помітимо також, що чотирикутник $TIMW$ вписаний з діаметром TW.
Покажемо, що $\angle BKI = \angle IMA$. За теоремою про тризуб $WA = WC = WI$, отже $WI^2 = WM \cdot WK$. Звідси $\Delta WIM \sim \Delta KIW$, а тому кути $\angle WMI = \angle WIK \Rightarrow \angle BKI = \angle IMA$.
Тепер в ΔBTW TI – висота і медіана, тому він рівнобедрений, а тому: $\angle TBI = \angle TWI = \angle TMI = \angle BKI$, з чого і випливає твердження задачі.

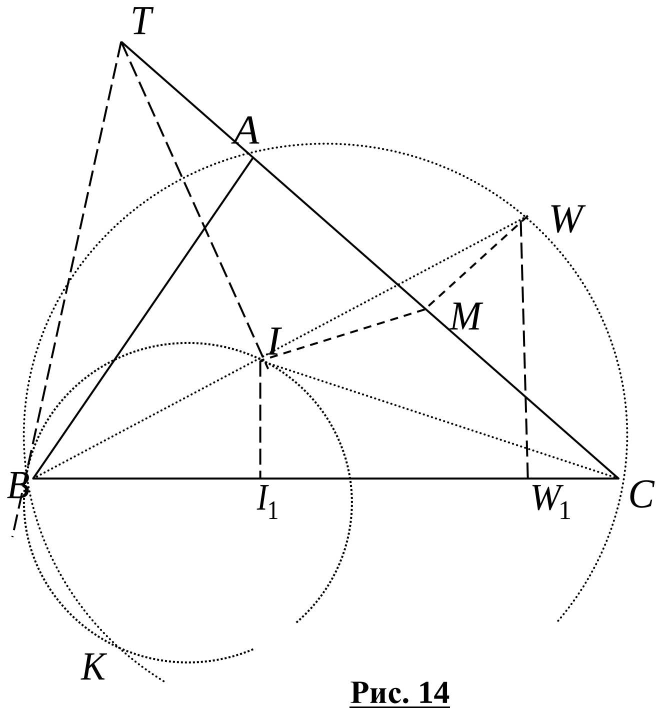

Рис. 14

5. Задача 10.5.

4.1. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC є бісектрисою $\angle BAD$ та $\angle ADC = \angle ACB$. Точки X, Y – основи перпендикулярів, що проведені з точки A на прямі BC, CD відповідно. Доведіть, що ортоцентр ΔAXY лежить на прямій BD.

Розв'язання. Нехай E – основа перпендикуляра, що проведений з точки Y на AX, $YE \cap BD = P$ (рис. 15) Тепер достатньо довести, що $XP \perp AY$, а це рівносильне доведенню, що $XP \,||\, CD$. Побачимо, що $YE \,||\, CB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{DP}{PB}$. З іншого боку, оскільки $\Delta ADC \sim \Delta BC$, то $\frac{DY}{YC} = \frac{CX}{XB}$. З одержаних рівностей маємо, що $\frac{DP}{PB} = \frac{CX}{XB} \Rightarrow$ $XP \,||\, CD$, що й треба було довести.

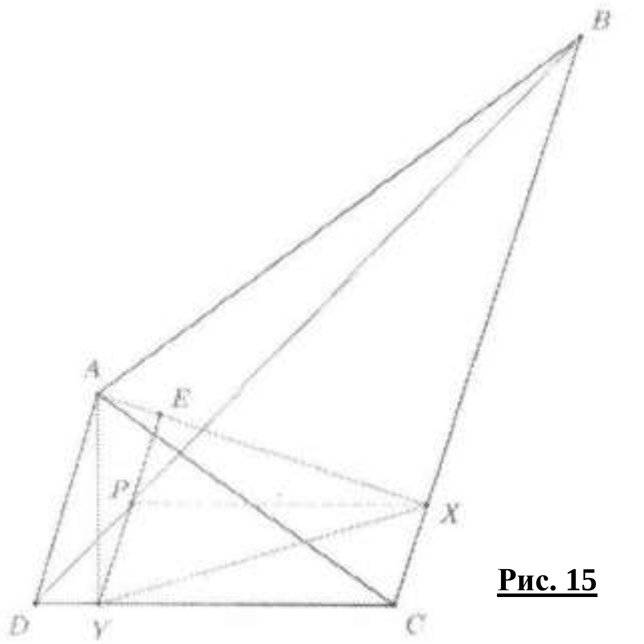

Рис. 15

5.1. Нехай x, y, z – додатні дійсні числа такі, що $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Доведіть, що $xy + yz + zx \geq 3$.

Розв'язання. Використовуючи дане рівняння та нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним, маємо

$$xy + yz + zx = xyz\left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{z}\right) =$$

$$= \frac{xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}{x + y + z} = \frac{xyz\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) + 2x + 2y + 2z}{x + y + z} \geq \frac{xyz\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)}{x + y + z} + 2 = 3.$$